Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen

---

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin

Von

Michael Golomb
in Berlin

Tag der Promotion: 27. Juli 1934

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., Braunschweig
1934

446

Referenten: Prof. Dr. A. Hammerstein

Prof. Dr. E. Schmidt

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderdruck aus „Mathematische Zeitschrift", Band 39, Heft 1, 1934

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Existenz- und Eindeutigkeitssätze.

§ 1. Eindeutige Lösungen 4
§ 2. Funktionen, die nicht stärker wachsen als lineare 10
§ 3. Anwendung auf die nichtlineare Randwertaufgabe 12
§ 4. Allgemeine Funktionalgleichungen 16

II. Mehrdeutige Probleme.

§ 5. Existenz einer nicht identisch verschwindenden Lösung (Eigenwertproblem) 19
§ 6. Eine Verallgemeinerung 22
§ 7. Einige Spezialfälle und Ergänzungen 28

Einleitung.

Das Studium der Randwertaufgaben der linearen Differentialgleichungen hat durch die Theorie der linearen Integralgleichungen eine weitgehende Förderung erfahren. Der gleiche Zusammenhang besteht zwischen der Theorie der Randwertaufgaben der nichtlinearen Differentialgleichungen und der nichtlinearen Integralgleichungen und läßt es berechtigt erscheinen, Gleichungen von der Gestalt

$$\psi(s) + \int_B K(s, t)\, f(t, \psi(t))\, dt = 0 \tag{1}$$

zu studieren. Dabei bedeutet B einen ein- oder mehrdimensionalen schlichten ganz im Endlichen gelegenen Bereich; s, t sind Punkte darin.

$K(s, t)$ ist ein für alle s, t in B erklärter Kern, $f(s, u)$ eine für alle s in B und alle reellen Werte von u erklärte Funktion. $\psi(s)$ soll so bestimmt werden, daß (1) identisch in s erfüllt ist.

Hammerstein hat als erster Existenz- und Eindeutigkeitssätze von allgemeinerem Charakter für die Lösungen der Gleichungen (1) aufgestellt[1]). Schon vorher wurden allgemeingültige Aussagen über nichtlineare Integralgleichungen von E. Schmidt gemacht[2]). Diese behandeln aber nur Existenz- und Eindeutigkeitsprobleme „im Kleinen", d. h. von einer bereits bekannten Lösung der Gleichung (1) ausgehend wird untersucht, wie viele Lösungen bei geringer Abänderung der Funktion $f(s, u)$ in der Nachbarschaft der Ausgangslösung liegen.

Setzt man über den Kern nur so viel voraus, daß auch die Greensche Funktion mit einbegriffen wird, nämlich, daß er brauchbar unstetig (im Sinne der linearen Integralgleichungen), symmetrisch und positiv definit ist, so muß man annehmen, daß $f(s, u)$ von beschränkter Ableitung in u ist, um über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (1) nach den Sätzen von Hammerstein etwas aussagen zu können. Die Beweismethode, die dabei verwandt wird, besteht darin, daß die Integralgleichung zurückgeführt wird auf ein System von unendlich vielen nichtlinearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, das durch endliche Gleichungssysteme approximiert wird. Diese werden als die notwendigen Extremumsbedingungen eines endlichen Extremumproblems erkannt und ihre Lösbarkeit damit nach dem Weierstraßschen Satz über die Extrema einer stetigen Funktion sichergestellt.

Die vorliegende Arbeit verwendet eine Methode, die sich der von Hammerstein darin anschließt, daß sie die nichtlineare Integralgleichung durch endliche Gleichungssysteme approximiert. Diese werden aber mit Hilfe eines gewöhnlichen Iterationsverfahrens gelöst und damit führt diese Methode nicht nur zu einem rein theoretischen Existentialbeweis, sondern liefert auch ein konstruktives Auflösungsverfahren (§ 1).

Sie benutzt ferner nicht die Symmetrie und Definitheit des Kernes und läßt sich auf Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen und damit auf die Randwertaufgabe der allgemeinen nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung

$$\Delta u = F(x, y, u, u'_x, u'_y),$$

[1]) Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta math. **54**, S. 117 u. f.

[2]) Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen III. Math. Annalen **65**, S. 370 u. f.

wo also rechts noch die ersten Ableitungen der Funktion $u(x, y)$ auftreten, anwenden (§ 3).

Auch ein Eindeutigkeitssatz kann für solche Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen, bei denen die Funktionen, die die Unbekannten enthalten, gewisse Lipschitzbedingungen erfüllen, bewiesen werden. Dies ist jedoch nicht mehr möglich, wenn man von diesen Funktionen nur voraussetzt, daß sie nicht stärker wachsen als lineare. Für diesen Fall kann aber noch mit Hilfe topologischer Methoden die Existenz einer Lösung bewiesen werden (§ 2). Dieselben Methoden gestatten es, die Existenz- und Eindeutigkeitssätze auch auf allgemeinere Funktionalgleichungen von nichtlinearem Charakter zu übertragen (§ 4).

Die Frage, ob neben einer reellen Lösung $\psi_1(s)$ eine weitere reelle Lösung $\psi_2(s)$ von (1) existiert, führt zur Untersuchung der Existenz reeller nicht identisch verschwindender Lösungen der Gleichung

$$\psi(s) + \int_B K(s, t)\, g(t, \psi(t))\, dt = 0, \tag{2}$$

wo

$$g(s, u) = f(s, \psi_1(s) + u) - f(s, \psi_1(s))$$

gesetzt ist. Denn (2) ist die Gleichung für die Differenz $\psi = \psi_2 - \psi_1$. Statt der Gleichung (2), die gewiß nicht immer eine nicht identisch verschwindende Lösung hat, [sonst wären Eindeutigkeitssätze für die Gleichung (1) nicht möglich] betrachten wir die mit einem Parameter versehene Gleichung

$$\lambda\, \psi(s) + \int_B K(s, t)\, g(t, \psi(t))\, dt = 0 \tag{3}$$

und fragen nach der Existenz solcher λ-Werte, für die diese Gleichung nicht identisch verschwindende Lösungen besitzt (II. Abschnitt). Auch in diesem Falle führt die Approximation durch endliche Gleichungssysteme zu einem Existenzsatz. Unter geeigneten Voraussetzungen über $K(s, t)$ und $g(s, u)$, die nur allgemeine Stetigkeitsforderungen (keine Wachstumsbedingungen) enthalten, gibt es immer mindestens einen reellen λ-Wert, für den die Gleichung (3) eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt (§ 5). Ein ähnlicher Satz ist bereits von L. Lichtenstein, der als erster dieses Problem behandelte, von anderem Ausgangspunkt und mit anderen Methoden bewiesen worden[3]). Der gleiche Satz kann auch durch direkte Auflösung eines Variationsproblems bewiesen werden, eine Methode, die diesen Satz auch für allgemeinere Funktionalgleichungen ähnlichen Charakters zu beweisen gestattet (§§ 6, 7).

[3]) L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen nebst Anwendungen. (Berlin 1931), S. 141 u. f.

I. Existenz- und Eindeutigkeitssätze.

§ 1.

Eindeutige Lösungen.

Satz 1. In dem nichtlinearen Integralgleichungssystem[4])

$$(4) \quad \psi_i(s) + \int_B K_i(s,t) f_i(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

seien die $K_i(s,t)$ brauchbar unstetige Kerne und die $f_i(s, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ für alle dem Bereich B angehörigen Punkte s und alle reellen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_n$ stetige Funktionen, die den Lipschitzbedingungen

$$(5a) \quad [f_i(s, u_1, \ldots, u_n) - f_i(s, v_1, \ldots, v_n)]^2 \leqq k_i^2 [(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2]$$

genügen, wobei die k_i von s, u_1, v_1, $\ldots$, u_n, v_n unabhängige positive Zahlen sind, für die

$$(5b) \quad \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = k^2 < \lambda_1^2$$

ist. Dabei ist λ_1 der kleinste der Eigenwerte der Kerne

$$\overline{K}_i(s,t) = \int_B K_i(s,r) K_i(t,r)\, dr.$$

Dann gibt es genau n in B stetige Funktionen $\psi_i(s)$, die die Gleichungen (4) identisch in s erfüllen[5]).

1. Existenzbeweis.

$p_{i1}(s)$, $p_{i2}(s)$, $\ldots$; $q_{i1}(s)$, $q_{i2}(s)$, $\ldots$

seien das E. Schmidtsche „vollständige normierte Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes“ $K_i(s,t)$, $0 < \lambda_{i1} \leqq \lambda_{i2} \leqq \ldots$ die zugehörigen Eigenwerte, die ja positiv angenommen werden dürfen[6]).

---

[4]) Das Gleichungssystem

$$G_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)) + \int_B K_i(s,t) F_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

läßt sich durch eine Substitution auf die Form (4) bringen, wenn das gewöhnliche System

$$G_i(s, u_1, \ldots, u_n) = v_i$$

für beliebige $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Lösung hat; vgl. Hammerstein, loc. cit. 1, S. 118. Das System (4) läßt sich nicht durch „Aneinanderfügen der Kerne“ auf eine einzige Integralgleichung zurückführen, wie das bei linearen Integralgleichungen der Fall ist. Diese Reduktion beruht wesentlich auf der Additivität linearer Funktionalausdrücke.

[5]) Unter Lösungen sind im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, immer reelle Lösungen zu verstehen. Ebenso sind alle vorkommenden Funktionen $K_i(s,t)$, f_i usw. als reelle anzusehen.

[6]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen I. Math. Annalen, S. 461 u. f.

Mit Hilfe eines einfachen Iterationsverfahrens erkennt man, daß das Gleichungssystem

$$(6)\qquad c_{i\varrho} + \frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} c_{1\sigma}\, p_{1\sigma}(t), \ldots, \sum_{\sigma=1}^{N} c_{n\sigma}\, p_{n\sigma}(t)\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ \varrho = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}$$

für jede natürliche Zahl N Lösungen besitzt. Sind nämlich ${}^0c_{1\varrho}, \ldots, {}^0c_{n\varrho}$ $n \cdot N$ beliebige reelle Zahlen, so werden die Systeme ${}^\varkappa c_{i\varrho}$ für alle natürlichen Zahlen $\varkappa$ sukzessive durch folgende Gleichungen definiert:

$$(7)\qquad {}^\varkappa c_{i\varrho} = -\frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^{\varkappa-1}c_{1\sigma}\, p_{1\sigma}, \ldots, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^{\varkappa-1}c_{n\sigma}\, p_{n\sigma}\Big) q_{i\varrho}\, dt \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Mit Hilfe der Besselschen Ungleichung ergibt sich dann:

$$\sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_{i\varrho}^2 ({}^{\varkappa+1}c_{i\varrho} - {}^\varkappa c_{i\varrho})^2 \leqq \int_B \Big[f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^\varkappa c_{1\sigma}\, p_{1\sigma}, \ldots\Big) - f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^{\varkappa-1}c_{1\sigma}\, p_{1\sigma}, \ldots\Big)\Big]^2 dt.$$

Berücksichtigt man (5a), so erhält man

$$\sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_{i\varrho}^2 ({}^{\varkappa+1}c_{i\varrho} - {}^\varkappa c_{i\varrho})^2 \leqq k_i^2 \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^\varkappa c_{\sigma\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{\sigma\varrho})^2.$$

Beachtet man noch, daß $\lambda_{i\varrho} \geqq \lambda_1$, so erhält man durch Summation über i nach (5b)

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^{\varkappa+1}c_{i\varrho} - {}^\varkappa c_{i\varrho})^2 \leqq \frac{k^2}{\lambda_1^2} \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^\varkappa c_{\sigma\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{\sigma\varrho})^2.$$

Mit den Bezeichnungen $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^\varkappa c_{i\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{i\varrho})^2 = {}^\varkappa C^2$ und $\frac{k}{\lambda_1} = \alpha$ schreibt sich (8)

$${}^{\varkappa+1}C \leqq \alpha \cdot {}^\varkappa C.$$

Wegen $\alpha < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} {}^\varkappa C$. Da nun $|{}^\varkappa c_{i\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{i\varrho}| \leqq {}^\varkappa C$ ist, konvergieren die Reihen $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} ({}^\varkappa c_{i\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{i\varrho})$ absolut, es existieren also die Grenzwerte

$$c_{i\varrho} = \lim_{\varkappa \to \infty} {}^\varkappa c_{i\varrho}$$

und aus (7) ergibt sich, daß diese $n \cdot N$ Zahlen Lösungen des Systems (6) sind. Für jede natürliche Zahl N kann also eine Lösung dieses Systems bestimmt werden. Mit Hilfe der Besselschen Ungleichung entnimmt man (6) die Abschätzung

$$(9)\qquad \sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho})^2 \leqq \int_B f_i \Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} c_{1\sigma}\, p_{1\sigma}(t), \ldots\Big)^2 dt.$$

Aus der Voraussetzung (5a) erkennt man leicht, daß es zu jeder positiven Zahl ε eine Konstante $a = a(\varepsilon)$ gibt, derart, daß für alle Punkte s in B und alle reellen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$(10)\qquad f_i(s, u_1, \ldots, u_n)^2 \leqq a + (k_i^2 + \varepsilon)(u_1^2 + \ldots + u_n^2)$$

wird. Dies ergibt zusammen mit (9)

$$\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho})^2 \leqq a \int_B dt + (k_i^2 + \varepsilon) \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} c_{\sigma\varrho}^2. \tag{11}$$

Ist ε so klein gewählt, daß $\sum_{i=1}^{n} (k_i^2 + \varepsilon) = k^2 + n\varepsilon < \lambda_1^2$ wird, so erhält man aus der letzten Ungleichung durch Summation über i

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^2 \leqq \frac{n a \int_B dt}{1 - \frac{k^2 + n\varepsilon}{\lambda_1^2}} = C, \tag{12}$$

wo C eine von N unabhängige Zahl ist. Die Ungleichung (11) lehrt dann, daß auch für die Summen $\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho})^2$ eine von N unabhängige obere Schranke existiert. Daraus fließt nun der ausgesprochene Existenzsatz, denn es gilt folgendes

Lemma: Hat das „approximierende" Gleichungssystem (6) für eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen N Lösungen $c_{i\varrho}^{(N)}$ und gibt es eine von N unabhängige Zahl C_1, so daß für alle Zahlen N der Folge

$$\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho}^{(N)})^2 \leqq C_1^2 \tag{13}$$

ist, so gibt es n stetige Funktionen $\psi_1(s), \ldots, \psi_n(s)$, die das Integralgleichungssystem (4) identisch in s erfüllen[7]).

---

[7]) Es gilt auch folgende Umkehrung dieses Lemmas: Ist $\Psi_1(s), \Psi_2(s), \ldots, \Psi_n(s)$ ein Lösungssystem von (4) und hat das lineare System

$$\psi_i(s) + \int_B K_i(s, t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} (t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))\, \psi_k(t)\, dt = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

keine Nullösungen $\psi_i(s)$, so gibt es zwei Zahlen N_1 und C_1, so daß für jedes $N > N_1$ das Gleichungssystem (6) reelle Lösungen $c_{i\varrho}^{(N)}$ besitzt, für die die Ungleichung (13) gilt. Man beweist dies mit Hilfe der E. Schmidtschen Theorie über die Lösbarkeit von nichtlinearen Integralgleichungen im Kleinen, vgl. loc. cit. 2. Es gilt nur zu beachten, daß das Gleichungssystem (6) äquivalent ist mit dem System

$$\psi_i^{(N)}(s) + \int_B (K_i(s, t) - \varepsilon_i^{(N)}(s, t))\, f_i(t, \psi_1^{(N)}, \ldots, \psi_n^{(N)})\, dt = 0,$$

wo

$$\psi_i^{(N)}(s) = \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^{(N)} p_{i\varrho}(s) \quad \text{und} \quad \varepsilon_i^{(N)}(s, t) = K_i(s, t) - \sum_{\varrho=1}^{N} \frac{p_{i\varrho}(s)\, q_{i\varrho}(t)}{\lambda_{i\varrho}}$$

gesetzt ist, und daß $\int_B \varepsilon_i^{(N)}(s, t)^2\, dt$ gleichmäßig in s gegen 0 konvergiert.

Zum Beweise erkläre man für alle Zahlen N der Folge die Funktionen

$$\psi_i^{(N)}(s) = \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^{(N)} p_{i\varrho}(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Aus dem Entwicklungssatz für quellenmäßig dargestellte Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} R_i^{(N)}(s) &= \psi_i^{(N)}(s) + \int_B K_i(s,t) f_i\left(t, \psi_1^{(N)}(t), \ldots, \psi_n^{(N)}(t)\right) dt \\ &= \sum_{\varrho=N+1}^{\infty} \frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\left(t, \psi_1^{(N)}(t), \ldots, \psi_n^{(N)}(t)\right) q_{i\varrho}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Schwarzsche und Besselsche Ungleichung liefern also

$$|R_i^{(N)}(s)| \leqq \left\{ \sum_{\varrho=N+1}^{\infty} \left(\frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2 \int_B f_i^2\, dt \right\}^{1/2}. \tag{16}$$

Aus der Voraussetzung (13) folgt nun die gleichmäßige Beschränktheit der $\psi_i^{(N)}(s)$; denn aus

$$\begin{aligned} |\psi_i^{(N)}(s)| = \left| \sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_{i\varrho} c_{i\varrho}^{(N)} \frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}} \right| &\leqq \left\{ \sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho} c_{i\varrho}^{(N)})^2 \left(\frac{p_{i\varrho}}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2 \right\}^{1/2} \\ &\leqq C_1 \left\{ \sum_{\varrho=1}^{N} \left(\frac{p_{i\varrho}}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

ergibt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{\varrho=1}^{\infty} \left(\frac{p_{i\varrho}}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2$ die Existenz einer von N unabhängigen Zahl C_2, für die

$$|\psi_i^{(N)}(s)| \leqq C_2 \tag{17}$$

ist. Beachtet man noch die Stetigkeit der Funktionen f_i, so zeigt (16) also, daß die Reste $R_i^{(N)}(s)$ gleichmäßig für alle s in B gegen 0 konvergieren.

Die Funktionenfolgen

$$\omega_i^{(N)}(s) = \int_B K_i(s,t) f_i\left(t, \psi_1^{(N)}(t), \ldots, \psi_n^{(N)}(t)\right) dt$$

sind gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig in B. Das ergibt die Schwarzsche Ungleichung, wenn man (17) und die Stetigkeit der iterierten Kerne beachtet. Es gibt also eine Teilfolge $\omega_i^{(N^*)}$ dieser Funktionen, die gleichmäßig für alle s in B gegen stetige Grenzfunktionen konvergieren. Dann müssen, wie aus der gleichmäßigen Konvergenz der $R_i^{(N)}(s)$ gegen Null folgt, auch die $\psi_i^{(N^*)}(s)$ gleichmäßig gegen stetige Grenzfunktionen $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ..., $\psi_n(s)$ konvergieren, die Lösungen des Gleichungssystems (4) sind.

2. Eindeutigkeitsbeweis.

Das Gleichungssystem (4) möge zwei Lösungssysteme haben: $\psi_i^{(1)}(s)$ und $\psi_i^{(2)}(s)$. Setzt man

$$\Psi_i(s) = \psi_i^{(2)}(s) - \psi_i^{(1)}(s) \quad \text{und} \tag{18}$$

$$f_i(s, \psi_1^{(1)} + u_1, \ldots, \psi_n^{(1)} + u_n) - f_i(s, \psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}) = F_i(s, u_1, \ldots, u_n),$$

so erhält man durch Subtraktion der beiden für $\psi_i^{(1)}$ und $\psi_i^{(2)}$ aufgeschriebenen Gleichungen

$$\Psi_i(s) + \int_B K_i(s, t) F_i(t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))\, dt = 0. \tag{19}$$

Das Gleichungssystem (4) hat also dann und nur dann eine von $\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}$ verschiedene Lösung, wenn das Gleichungssystem (19) ein von $\Psi_1(s) = \Psi_2(s) = \ldots = \Psi_n(s) = 0$ (für alle s in B) verschiedenes Lösungssystem besitzt.

Wenn es ein Lösungssystem $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ von (19) gibt, so läßt es sich durch die gleichmäßig konvergenten Reihen $\Psi_i(s) = \sum_{\varrho=1}^{\infty} C_{i\varrho}\, p_{i\varrho}(s)$ darstellen. Die Fourier-Koeffizienten $C_{i\varrho}$ haben dabei nach (19) die Gestalt

$$C_{i\varrho} = -\frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B F_i(t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))\, q_{i\varrho}(t)\, dt \quad (\varrho = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Es ist also nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_{i\varrho} C_{i\varrho})^2 \leqq \int_B F_i(t, \Psi_1, \ldots, \Psi_n)^2\, dt. \tag{21}$$

Aus der Voraussetzung (5a) folgt

$$F_i(s, u_1, \ldots, u_n)^2 \leqq k_i^2 (u_1^2 + \ldots + u_n^2).$$

Somit ist wegen (21)

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_{i\varrho} C_{i\varrho})^2 \leqq k_i^2 \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} C_{\sigma\varrho}^2$$

und durch Summation über i erhält man daraus

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_{i\varrho} C_{i\varrho})^2 \leqq k^2 \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} C_{\sigma\varrho}^2.$$

Das ist wegen $k^2 < \lambda_1^2 \leqq \lambda_{i1}^2 \leqq \lambda_{i2}^2 \leqq \ldots$ nur möglich, wenn alle Fourier-Koeffizienten $C_{i\varrho}$ verschwinden, die Funktionen $\Psi_1(s), \ldots, \Psi_n(s)$ also identisch Null sind. Dieser Eindeutigkeitssatz ergibt auch, daß jedes der Systeme (6) genau ein Lösungssystem besitzt; denn die $c_{i\varrho}^{(N)}$ sind die Fourier-Koeffizienten sämtlicher Lösungen des Systems

$$\psi_i(s) + \int_B \Big(\sum_{\varrho=1}^{N} \frac{p_{i\varrho}(s)\, q_{i\varrho}(t)}{\lambda_{i\varrho}} \Big) f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))\, dt = 0.$$

Da für dieses System die Voraussetzungen (5a) und (5b) erfüllt sind, besitzt es genau ein Lösungssystem $\psi_i^{(N)}(s)$; die Fourier-Koeffizienten dieser Lösungsfunktion in der Entwicklung $\psi_i^{(N)}(s) = \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^{(N)} p_{i\varrho}(s)$ sind daher eindeutig bestimmt.

Ohne Beweis sei hier noch angeführt:

Zusatz zu Satz 1: Der Satz 1 bleibt gültig, wenn statt (5b) die etwas weniger einschränkende Voraussetzung

$$\frac{k_1^2}{\lambda_{11}^2} + \frac{k_2^2}{\lambda_{21}^2} + \ldots + \frac{k_n^2}{\lambda_{n1}^2} < 1 \tag{5b'}$$

erfüllt ist.

Die Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ mögen nun die Lipschitzbedingungen (5a) erfüllen, die zweite Voraussetzung (5b) sei aber verletzt. Dann gilt der

Satz 2: Genügen die stetigen Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ den Lipschitzbedingungen (5a), so ist die Anzahl der Lösungen des nichtlinearen Integralgleichungssystems (4) gleich der Anzahl der Lösungen eines endlichen transzendenten Gleichungssystems.

Beweis: Laut bekannten Eigenschaften der Eigenwerte kann man Indizes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ finden, für die

$$\lambda_{i m_i} \leqq k < \lambda_{i m_i + 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, wo k die in (5a) genannte Zahl ist[8]). [λ_{i0} ist dabei gleich Null zu setzen].

Setzt man nun

$$K_i^{(m_i)}(s, t) = K(s, t) - \sum_{\varrho=1}^{m_i} \frac{p_{i\varrho}(s)\, q_{i\varrho}(t)}{\lambda_{i\varrho}},$$

so hat nach Satz 1 das Gleichungssystem

$$\Psi_i(s) + \int_B K_i^{(m_i)}(s, t)\, f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{m_1} a_{1\sigma} p_{1\sigma}(t) + \Psi_1(t), \ldots\Big)\, dt = 0 \tag{22}$$

bei beliebiger Wahl der Konstanten $a_{i\varrho}$ genau ein Lösungssystem $\Psi_1(s) = \Psi_1(s, a_1, \ldots, a_n), \ldots, \Psi_n(s) = \Psi_n(s, a_1, \ldots, a_n)$. Jedes Lösungssystem $a_{i\varrho}$ der $n \cdot (m_1 + \ldots + m_n)$ transzendenten Gleichungen

$$a_{i\varrho} + \frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{m_1} a_{1\sigma} p_{1\sigma}(t) + \Psi_1(t, a_1, \ldots, a_n), \ldots\Big)\, q_{i\varrho}(t)\, dt = 0 \tag{23}$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, m_i)$$

[8]) Haben einige der Kerne $K_i(s, t)$ nur endlich viele Eigenwerte, so haben die entsprechenden Unbekannten $\psi_i(s)$ nur endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten $c_{i\varrho}$. Für solche Kerne gilt also der Satz 2.

führt, wie man durch Multiplikation mit $p_{i\varrho}(s)$ und Addition zu (22) unmittelbar erkennt, auf eine Lösung von (4). Zu verschiedenen Wertesystemen $a_{i\varrho}$ gehören verschiedene Lösungen ψ_i von (4). Umgekehrt gehört zu jedem Lösungssystem ψ_i von (4) genau ein Lösungssystem von (22) und (23), da die $a_{i\varrho}$ die ersten Fourier-Koeffizienten der ψ_i sind und die Funktionen Ψ_i erhalten werden durch

$$\Psi_i(s) = \psi_i(s) - \sum_{\varrho=1}^{m_i} a_{i\varrho}\, p_{i\varrho}(s).$$

Da das Gleichungssystem (22) nur eine Lösung besitzt, gehören zu verschiedenen Systemen ψ_i auch verschiedene Systeme $a_{i\varrho}$.

Unter den Voraussetzungen (5a) und (5b) ist das Gleichungssystem (4) eindeutig lösbar. Unser Existenzbeweis verlangte jedoch die Auswahl einer konvergenten Teilfolge aus der Folge der Näherungslösungen. Eine solche Auswahl ist jedoch nicht nötig, vielmehr strebt die Folge der Näherungslösungen als ganze gegen das Lösungssystem $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Eine leichte Rechnung, die ebenso geführt wird, wie im Falle einer Gleichung mit einer Unbekannten (s. Hammerstein, loc. cit. 1, S. 153) zeigt nämlich, daß es zwei von s und N unabhängige Konstante M_1 und M_2 gibt, so daß der Unterschied zwischen der eindeutig bestimmten Lösung von (4) und der Näherung abgeschätzt wird durch

$$\sum_{i=1}^{n} |\psi_i(s) - \psi_i^{(N)}(s)| \leqq M_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=N+1}^{\infty} \left(\frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}} \right)^2 \right\}^{1/2} + \frac{M_2}{\lambda_{N+1}}.$$

Dabei ist $\lambda_N = \mathrm{Min}\,(\lambda_{1N}, \lambda_{2N}, \ldots, \lambda_{nN})$ gesetzt. Insbesondere ergibt sich daraus, daß die $\psi_i^{(N)}(s)$ gleichmäßig für alle s in B gegen die $\psi_i(s)$ konvergieren.

§ 2.

Funktionen, die nicht stärker wachsen als lineare.

Satz 3. In dem Gleichungssystem

$$\psi_i(s) + \int_B K_i(s,t)\, f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

seien die $K_i(s,t)$ brauchbar unstetige Kerne und die stetigen Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ mögen den Bedingungen

$$|f_i(s, u_1, \ldots, u_n)| \leqq a + k_{i1}|u_1| + k_{i2}|u_2| + \ldots + k_{in}|u_n| \tag{24a}$$

genügen, wobei die k_{i1} von $s, u_1, \ldots, u_n$ unabhängige positive Zahlen sind, für die

$$(k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2)(M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2) < 1 \tag{24b}$$

ist. (Dabei ist

$$M_i^2 = \int_B \int_B K_i(s,t)^2\, ds\, dt$$

gesetzt.) Dann gibt es n in B stetige Funktionen $\psi_i(s)$, die die Gleichungen (4) identisch in s erfüllen.

Beweis: Für die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Kerne $K_i(s,t)$ seien die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten. Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung folgert man aus der Voraussetzung (24a), daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $a_1 = a_1(\varepsilon)$ gibt, so daß für s in B und alle reellen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$f_i(s, u_1, \ldots, u_n)^2 \leqq a_1 + (k_{i1}^2 + \ldots + k_{in}^2 + \varepsilon)(u_1^2 + \ldots + u_n^2)$$

wird. Man wähle ε so klein, daß

$$k_i^2 = k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2 + \varepsilon < \frac{1}{M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2}$$

ausfällt, dann ist für jedes System von reellen Zahlen $d_{i\varrho}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $\varrho = 1, 2, \ldots, N)$, die den Ungleichungen $|d_{i\varrho}| \leqq d$ genügen,

$$(25)\quad \int_B \Big[f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{1\sigma} \frac{p_{1\sigma}}{\lambda_{1\sigma}}, \ldots, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{n\sigma} \frac{p_{n\sigma}}{\lambda_{n\sigma}}\Big)\Big]^2 dt \leqq a_1 \int_B dt + k_i^2 \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{N} \Big(\frac{d_{\nu\sigma}}{\lambda_{\nu\sigma}}\Big)^2$$
$$\leqq a_2 + d^2 k_i^2 (M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2).$$

Somit wird nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\Big| \int f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{1\sigma} \frac{p_{1\sigma}}{\lambda_{1\sigma}}, \ldots\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt \Big| \leqq \Big\{ \int_B f_i^2\, dt \Big\}^{1/2}$$
$$\leqq d\, k_i \sqrt{M_1^2 + \ldots + M_n^2} \Big(1 + \frac{a_2}{d^2 k_i^2 (M_1^2 + \ldots + M_n^2)}\Big)^{1/2}.$$

Wegen $k_i^2 (M_1^2 + \ldots + M_n^2) < 1$ kann man also d unabhängig von i und N so groß wählen, daß die linke Seite der letzten Ungleichung kleiner als d ausfällt. Somit sind die in den $d_{i\varrho}$ stetigen $n \cdot N$ Funktionen

$$(26)\qquad D_{i\varrho} = d_{i\varrho} + \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{1\sigma} \frac{p_{1\sigma}}{\lambda_{1\sigma}}, \ldots\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt$$

positiv für $\quad d_{i\varrho} = d, \quad |d_{k\sigma}| \leqq d \qquad (k, \sigma \neq i, \varrho),$

negativ für $\quad d_{i\varrho} = -d, \quad |d_{k\sigma}| \leqq d \qquad (k, \sigma \neq i, \varrho).$

Daraus folgt, z. B. nach dem Brouwerschen Verschiebungssatze[9]), daß das Gleichungssystem $D_{i\varrho} = 0$ mindestens ein reelles Lösungssystem $d_{i\varrho}$ besitzt. Setzt man $d_{i\varrho} = \lambda_{i\varrho} c_{i\varrho}^{(N)}$ in (26) ein, so erkennt man, daß das

[9]) Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. Math. Annalen 70, S. 161—165.

Gleichungssystem $D_{i\varrho} = 0$ identisch wird mit dem approximierenden System (6). Dieses besitzt also auch unter der Voraussetzung (24) für jede natürliche Zahl N eine Lösung. Die Besselsche Ungleichung und Abschätzung (25) liefern:

$$\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho}^{(N)})^2 = \sum_{\varrho=1}^{N} d_{i\varrho}^2 \leqq \int_B f_i\Big(t,\ \sum_{\varrho=1}^{N} c_{1\varrho}^{(N)} p_{1\varrho}(t),\ \ldots\Big)^2 dt \leqq a_2 \cdot d^2.$$

Es sind also alle Voraussetzungen des Lemmas in § 1 erfüllt, woraus die Richtigkeit des behaupteten Satzes folgt.

Daß die Voraussetzung (24) nicht genügt, um die Eindeutigkeit der Lösung zu beweisen, ist klar. Selbst wenn alle Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ in sämtlichen Variabeln beschränkt sind, ist das System (4) im allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Das sieht man am leichtesten folgendermaßen ein: Sei $n = 1$, $g(s, u)$ eine beschränkte Funktion, $g(s, 0) = 0$ und λ eine beliebige reelle Konstante. Dann hat die Gleichung

$$\psi(s) + \lambda \int_B K(s, t)\, g\big(t, \psi(t)\big)\, dt = 0$$

gewiß die Lösung $\psi(s) = 0$. Im Abschnitt II wird aber bewiesen werden, daß diese Gleichung für mindestens einen reellen Parameterwert λ_0 eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, wenn der Kern gewisse Voraussetzungen erfüllt. Wählt man also die beschränkte Funktion $f(s, u) = \lambda_0 g(s, u)$, so ist die Gleichung

$$\psi(s) + \int_B K(s, t)\, f\big(t, \psi(t)\big)\, dt = 0$$

gewiß nicht eindeutig lösbar.

Ist die Voraussetzung (24a) erfüllt, (24b) aber verletzt, so kann man ebenso verfahren wie im Beweise zu Satz 2. Es gibt Indizes $m_1, m_2, \ldots, m_n$, so daß

$$k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2 < \frac{1}{\sum_{\varrho=m_1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{1\varrho}^2} + \ldots + \sum_{\varrho=m_n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n\varrho}^2}}$$

wird. Ebenso wie in § 1 wird dann bewiesen, daß alle Lösungen ψ_i des Systems (4) dadurch gewonnen werden, daß man zu jeder Lösung Ψ_i von (22) die Lösungen $a_{i\varrho}$ des endlichen transzendenten Gleichungssystems (23) bestimmt.

§ 3.

Anwendung auf die nichtlineare Randwertaufgabe.

Satz 4. Das beschränkte Gebiet B der x, y-Ebene und die auf seinem Rande definierte stetige Funktion $f(s)$ seien so beschaffen, daß

für sie die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie eindeutig lösbar ist. $G(x, y; \xi, \eta)$ sei die zu B gehörige Greensche Funktion, $F(x, y, u, u_1, u_2)$ eine für x, y in B und alle reellen Werte von u, u_1, u_2 stetige Funktion.

Dann hat die nichtlineare Differentialgleichung

$$\Delta u = F(x, y, u, u'_x, u'_y) \tag{27}$$

eine Lösung, die auf dem Rande von B die Werte $f(s)$ annimmt, wenn eine der beiden folgenden Voraussetzungen über F erfüllt ist:

Für x, y, in B und für alle reellen Werte der u, u_1, u_2 ist

α)

$$|F(x, y, u, u_1, u_2)| \leqq a + k|u| + k_1|u_1| + k_2|u_2| \tag{28a}$$

und

$$(k^2 + k_1^2 + k_2^2)(M^2 + M_1^2 + M_2^2) < 1 \tag{28b}$$

oder β)

$$[F(x, y, u, u_1, u_2) - F(x, y, v, v_1, v_2)]^2 \leqq k^2[(u - v)^2 + (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2] \tag{29a}$$

und

$$k^2(M^2 + M_1^2 + M_2^2) < 1. \tag{29b}$$

(Dabei ist

$$M^2 = \iint_B \iint_B G\ (x, y; \xi, \eta)^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

$$M_1^2 = \iint_B \iint_B G'_x(x, y; \xi, \eta)^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

$$M_2^2 = \iint_B \iint_B G'_y(x, y; \xi, \eta)^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta$$

gesetzt.) Im Falle β) hat die Aufgabe eine und nur eine Lösung.

Ist Voraussetzung (28a) oder (29a) erfüllt, (28b) bzw. (29b) dagegen nicht, so ist die Anzahl der Lösungen im Falle α) nicht kleiner, im Falle β) genau gleich der Anzahl der Lösungen eines endlichen transzendenten Gleichungssystems.

Beweis: Ist $f(x, y)$ eine in B stetige Funktion, so läßt sich die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta v &= f(x, y) && \text{in } B \\ v &= 0 && \text{auf dem Rande von } B \end{aligned} \tag{30}$$

in der Form

$$v(x, y) = -\iint_B G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{31}$$

schreiben und es ist nach bekannten Formeln

$$(31)\qquad \begin{aligned} v'_x(x, y) &= -\iint_B G'_x(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\ v'_y(x, y) &= -\iint_B G'_y(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

Umgekehrt folgen aus den Gleichungen (31) die Gleichungen (30). Ist $u_0(x, y)$ die Potentialfunktion, die auf dem Rande von B die Werte $f(s)$ annimmt, so ist die Randwertaufgabe (27) äquivalent mit dem System von nichtlinearen Integralgleichungen für die gesuchten Funktionen $u(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$:

$$(32)\qquad \begin{aligned} u(x, y) &+ \iint_B G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta; u(\xi, \eta) + u_0(\xi, \eta), u_1 + u'_{0x}, \\ &\qquad u_2 + u'_{0y})\, d\xi\, d\eta = 0, \\ u_1(x, y) &+ \iint_B G'_x F\, d\xi\, d\eta = 0, \\ u_2(x, y) &+ \iint_B G'_y F\, d\xi\, d\eta = 0; \end{aligned}$$

denn $U(x, y) = u(x, y) + u_0(x, y)$ mit den Ableitungen $U'_x = u_1(x, y) + u'_{0x}(x, y)$, $U'_y = u_2 + u'_{0y}$ befriedigt die Gleichung (27) und nimmt am Rande die Werte $f(s)$ an. Nach Satz 3 und Zusatz zu Satz 1 ist das System (32) lösbar, wenn die Bedingungen (28) oder (29) erfüllt sind, in letzterem Falle eindeutig lösbar. Das endliche transzendente Gleichungssystem, das die Entscheidung über die Lösungsanzahl liefert, wenn (28b) oder (29b) nicht erfüllt ist, ist nach den Ausführungen im Beweis zu Satz 2 leicht abzuleiten.

Für einseitig beschränkte Funktionen F können die Voraussetzungen (28) noch verallgemeinert werden. Wir beschränken uns dabei auf die Randbedingungen $f(s) = 0$ am ganzen Rande, auf die die allgemeine erste Randwertaufgabe zurückgeführt werden kann, dadurch, daß man von der gesuchten Funktion die Potentialfunktion subtrahiert, die am Rande die vorgeschriebenen Randwerte annimmt. Mit Hilfe des Satzes 4 beweist man dann den

Zusatz zu Satz 4: Die Gleichung (27) hat eine am Rande verschwindende reelle Lösung, wenn eine der folgenden vier Voraussetzungen erfüllt ist:

Für x, y in B und alle reellen Werte von u_1, u_2 ist:

$\alpha)$ $\quad 0 \leqq F(x, y, u, u_1, u_2) \leqq a_1 - ku + k_1|u_1| + k_2|u_2|$ für $u \leqq 0$;

$\beta)$ $\quad 0 \geqq F(x, y, u, u_1, u_2) \geqq -a_1 - ku - k_1|u_1| - k_2|u_2|$ „ $u \geqq 0$;

$$\gamma)\begin{cases} -a_2 \leqq F(x, y, u, u_1, u_2) & ,, \quad u \geqq 0, \\ -a_2 \leqq F(x, y, u, u_1, u_2) \leqq a_1 - k u + k_1 |u_1| + k_2 |u_2| & ,, \quad u \leqq 0; \end{cases}$$

$$\delta)\begin{cases} a_2 \geqq F(x, y, u, u_1, u_2) \geqq -a_1 - k u - k_1 |u_1| - k_2 |u_2| & ,, \quad u \geqq 0, \\ a_2 \geqq F(x, y, u, u_1, u_2) & ,, \quad u \leqq 0. \end{cases}$$

a_1, a_2 sind dabei beliebige positive Konstanten; die positiven Konstanten k, k_1, k_2 genügen (28b).

Beweis: Der Beweis wird unter den Voraussetzungen $\alpha)$ und $\gamma)$ geführt, für $\beta)$ und $\delta)$ verläuft er ebenso. Zum Beweise der ersten Behauptung setze man:

$$\overline{F}(x, y, u, u_1, u_2) = \begin{cases} F(x, y, u, u_1, u_2) & \text{für } u \leqq 0, \\ F(x, y, 0, u_1, u_2) & \text{für } u \geqq 0. \end{cases}$$

Dann genügt $\overline{F}$ den Voraussetzungen des Satzes 4, und es ist durchweg $\overline{F} \geqq 0$; somit gibt es eine Lösung von

$$\Delta \bar{u} = \overline{F}(x, y, \bar{u}, \bar{u}'_x, \bar{u}'_y),$$

die auf dem Rande von B verschwindet. Aus $F \geqq 0$ folgt, wie bekannt ist, $\bar{u}(x, y) \leqq 0$ für x, y in B. Da für $u \leqq 0$ $\overline{F} = F$ ist, löst $\bar{u}(x, y)$ auch die ursprüngliche Aufgabe.

Zum Beweise der zweiten Behauptung setze man

$$\overline{F}(x, y, u, u_1, u_2) = F(x, y, u + u_0(x, y), u_1 + u'_{0x}(x, y), u_2 + u'_{0y}(x, y)) + a_2.$$

Für jede stetige Funktion $u_0(x, y) \leqq 0$ ist $\overline{F}$ eine Funktion, die der Voraussetzung $\alpha)$ mit anderen Konstanten genügt. Die Gleichung

$$\Delta \bar{u} = \overline{F}(x, y, \bar{u}, \bar{u}'_x, \bar{u}'_y)$$

hat also eine auf dem Rande von B verschwindende Lösung $u(x, y)$. Ist nun $u_0(x, y)$ so gewählt, daß

$$\Delta u_0 = a_2 \quad \text{in } B,$$
$$u_0 = 0 \quad \text{am Rande von } B,$$

so löst $u(x, y) = \bar{u}(x, y) - u_0(x, y)$ die ursprüngliche Aufgabe.

Dieser Zusatz beweist, daß z. B. die erste Randwertaufgabe für die Gleichung

$$\Delta u = p(x, y, u, u'_x, u'_y)\, e^u$$

eine Lösung besitzt, wenn die für $u \leqq 0$ positive Funktion $p(x, y, u, u_1, u_2)$ in u, u_1, u_2 weniger wächst als eine lineare Funktion.

Der Satz 4 mit seinem Zusatz ist in seiner Gültigkeit natürlich nicht auf die zweidimensionale Randwertaufgabe beschränkt, sondern gilt allgemein für die n-dimensionale erste Randwertaufgabe[10]).

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Voraussetzung (24) in Satz 3 durch analoge Bedingungen wie im Zusatz zu Satz 4 ersetzt werden kann, wenn die Kerne $K_i(s, t)$, oder einige unter ihnen in B durchweg von einerlei Vorzeichen sind.

§ 4.

Allgemeine Funktionalgleichungen.

Die bisher abgeleiteten Existenz- und Eindeutigkeitssätze gelten nicht nur für die behandelten Integral- und Differentialgleichungen, sondern auch für allgemeinere Funktionalgleichungen.

Σ bezeichne das Feld der in dem beschränkten Gebiet B definierten Funktionen $\varphi(s)$, die mit ihren stetigen Ableitungen bis zur n-ten Ordnung unter der absoluten Schranke $N > 0$ liegen. Ist dann

$$\psi(s) = S(s;\ \varphi)$$

eine für s in B und φ in Σ definierte eindeutige Funktionaltransformation, die stetig ist von der n-ten Ordnung[11]) und Σ in einen kompakten Teil Σ' von sich überführt (d. h. jede beschränkte Folge aus Σ' enthält eine nebst ihren Ableitungen bis zur n-ten Ordnung konvergente Teilfolge), so hat die Gleichung

$$\psi(s) = S(s;\ \psi) \tag{33}$$

mindestens eine Lösung $\psi(s)$ in Σ.

[10]) Vgl. A. Hammerstein, Die erste Randwertaufgabe für nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges., XXX. Jahrg. — Der Existenzsatz, der dort für die eindimensionale Randwertaufgabe $y'' = f(x, y, y')$, $y(0) = y(\pi) = 0$ bewiesen wird, fordert die Beschränktheit von $f(x, y, y')$ in y', während das nach unserem Satz 4 nicht erforderlich ist. Für Funktionen mit beschränkten Ableitungen wird dort nur die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen, während unser Satz zugleich die Existenz beweist.

[11]) D. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, so daß für

$$\operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} (|\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_1' - \varphi_2'| + \cdots + |\varphi_1^{(n)} - \varphi_2^{(n)}|) < \delta$$

die Differenz

$$|S(s;\ \varphi_1) - S(s;\ \varphi_2)| < \varepsilon$$

wird für alle s in B. Das Symbol $\varphi^{(i)}$ steht an Stelle aller Ableitungen i-ter Ordnung.

Dieser Fixpunktsatz rührt in dieser Fassung von Caccioppoli her und läßt sich leicht mit Hilfe des analogen für n-dimensionale Räume gültigen Brouwerschen Fixpunktsatzes beweisen[12]).

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die bisher abgeleiteten Existenz- und Eindeutigkeitssätze weitgehend verallgemeinern:

Satz 5: Sei $\psi(s) = S(s; \varphi)$ eine für s in B und φ in Σ definierte eindeutige Funktionaltransformation, die stetig ist in dem Sinne, daß, wenn $\varphi_i(s)$ eine Folge ist, die gleichmäßig in B gegen $\varphi(s)$ konvergiert, die Funktionen $\psi_i(s) = S(s; \varphi_i)$ mit ihren Ableitungen $\psi_i^{(1)}(s), \ldots, \psi_i^{(n)}(s)$ gleichmäßig gegen $\psi(s) = S(s; \varphi)$, bzw. $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(n)}(s)$ konvergieren. Ferner seien für s in B

$$|\psi^{(\nu)}(s)| \leqq A + M \cdot \operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} |\varphi(s)| \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

und die $\psi, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)}$ gleichgradig stetig für gleichmäßig beschränkte φ. Dann hat die Funktionalgleichung

$$u(s) = S[s; F(s, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})] \tag{35}$$

eine in Σ gelegene Lösung $u(s)$, wenn die Funktion $F(s, u, u_1, \ldots, u_n)$ für s in B und alle reellen Werte der $u, u_1, \ldots, u_n$ stetig ist und

$$|F(s, u, u_1, \ldots, u_n)| \leqq a + k|u| + k_1|u_1| + \ldots + k_n|u_n| \tag{36a}$$

ist, wobei die positiven Konstanten $M, k, k_1, \ldots, k_n$ der Bedingung

$$(k + k_1 + \ldots + k_n) M = q < 1 \tag{36b}$$

genügen[13]).

Beweis: Die Transformation

$$\psi(s) = S^*(s; \varphi) = S[s, F(s, \varphi, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})]$$

ist stetig in dem Sinne, daß, wenn $\varphi_i(s), \varphi_i^{(1)}(s), \ldots, \varphi_i^{(n)}(s)$ gleichmäßig in B gegen $\varphi(s), \varphi^{(1)}(s), \ldots, \varphi^{(n)}(s)$ konvergieren, die Funktionen

$$\psi_i(s) = S^*(s; \varphi_i)$$

[12]) Caccioppoli, Un teorema generale sull' existenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale. Rend. Acc. Lincei (6) vol. 11, S. 794 u. f. und Sugli elementi uniti delle transformazioni funzionali. Ebenda vol. 13, S. 498 u. f.

[13]) Vgl. Caccioppoli, l. c. Dort wird dieser Satz bewiesen, jedoch nur für Funktionen, die *schwächer* wachsen als lineare, für die also

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{F(s, u, u_1, \ldots, u_n)}{\omega} = 0,$$

wo $\omega = \sqrt{u^1 + u_1^2 + \ldots + u_n^2}$ ist.

gleichmäßig mit ihren Ableitungen $\psi_i^{(1)}, \ldots, \psi_i^{(n)}$ gegen $\psi(s) = S^*(s; \varphi)$ bzw. $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(n)}(s)$ konvergieren. Ferner ist für

$$|\varphi(s)| \leqq N, \quad |\varphi^{(1)}| \leqq N, \ldots, |\varphi^{(n)}| \leqq N$$

nach (34) und (36)

$$|\psi^{(\nu)}(s)| \leqq A + M \operatorname*{Max}_{s \text{ in } E} |F(s, \varphi, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})|$$

$$\leqq A + M[a + N(k + k_1 + \ldots + k_n)] \leqq A_\nu < N \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Für genügend große N ist also $|\psi| < N, |\psi^{(1)}| < N, \ldots, |\psi^{(n)}| < N$. Außerdem ist jede Folge $\psi_i, \psi_i^{(1)}, \ldots, \psi_i^{(n)}$ gleichgradig stetig nach Voraussetzung, also wegen der gleichmäßigen Beschränktheit kompakt. Die Transformation S^* erfüllt somit die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes, es gibt also eine in Σ gelegene Lösung der Gleichung

$$\varphi(s) = S^*(s, \varphi) = S(s; F(s, \varphi, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})).$$

Ist insbesondere $S(s; \varphi) = A(s) + T(s; \varphi)$, wo $T(s; \varphi)$ homogen linear in φ ist, so gelingt es auch, den Eindeutigkeitssatz zu übertragen. Dieser Fall ist der für die Anwendungen allein wichtige.

Satz 6. Ist das in Satz 5 definierte Funktional

$$S[s; \varphi] = A(s) + T(s, \varphi),$$

wo $A(s)$ von φ unabhängig ist und $T(s; \varphi)$ homogen linear in φ ist, so hat die Gleichung

$$u(s) = S[s; F(s, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})] \tag{35}$$

genau eine Lösung in Σ, wenn $F(s, u, u_1, \ldots, u_n)$ die Lipschitzbedingungen

$$|F(s, u, u_1, \ldots, u_n) - F(s, v, v_1, \ldots, v_n)| \leq k|u - v| + k_1|u_1 - v_1| + \ldots + k_n|u_n - v_n| \tag{37a}$$

erfüllt und die positiven Konstanten k_ν der Bedingung

$$(k + k_1 + \ldots + k_n) M = q < 1 \tag{37b}$$

genügen.

Beweis: Aus der Voraussetzung (37a) ergibt sich sofort, daß

$$|F(s, u, u_1, \ldots, u_n)| \leq a + k|u| + k_1|u_1| + \ldots + k_n|u_n|$$

ist mit der Konstanten $a = \operatorname*{Max}_{s \text{ in } E} |F(s, 0, 0, \ldots, 0)|$. Wegen (37b) genügt also F den Voraussetzungen des Satzes 5, die Gleichung (35) hat also mindestens eine Lösung $u_1(s)$ in Σ. Sei $u_2(s)$ eine weitere Lösung in Σ, dann ist

$$\begin{aligned} u_2(s) - u_1(s) &= T[s; F(s, u_2, u_2^{(1)}, \ldots, u_2^{(n)})] \\ &\quad - T[s; F(s, u_1, u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(n)})] \\ &= T[s; F(s, u_2, \ldots) - F(s, u_1, \ldots)]. \end{aligned}$$

Da nun $T(s;\varphi)$ der homogene Teil von $S(s;\varphi)$ ist, folgt aus (34) $|T(s;\varphi)| \leqq M \cdot \underset{s \text{ in } B}{\text{Max}} |\varphi(s)|$, somit wird nach (37)

$$|u_2^{(\nu)}(s) - u_1^{(\nu)}(s)| \leqq M \cdot \underset{s \text{ in } B}{\text{Max}} |F(s, u_2, \ldots) - F(s, u_1, \ldots)|$$

$$\leqq M \cdot \underset{s \text{ in } B}{\text{Max}} (k|u_2 - u_1| + k_1|u_2^{(1)} - u_1^{(1)}| + \ldots + k_n|u_2^{(n)} - u_1^{(n)}|) \tag{38}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Sei $\underset{s \text{ in } B}{\text{Max}} |u_2^{(\nu)}(s) - u_1^{(\nu)}(s)| = \varrho^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ gesetzt. Die größte der $n+1$ Zahlen $\varrho^{(0)}, \varrho^{(1)}, \ldots, \varrho^{(n)}$ sei ϱ, dann ist nach (38) und (37b)

$$\varrho \leqq M\varrho(k + k_1 + \ldots + k_n) = q\varrho.$$

Das ist wegen $q < 1$ nur möglich, wenn $\varrho = 0$, also $u_2(s) - u_1(s) \equiv 0$ ist.

Als Anwendung sei das folgende Beispiel genannt: Die allgemeine nichtlineare Integralgleichung

$$\psi(s) + \int_B (F\, s, t, \psi(t))\, dt = 0 \tag{39}$$

hat eine Lösung, wenn die stetige Funktion $F(s, t, u)$ den Bedingungen

$$|F(s, t, u)| \leqq a + k|u|, \qquad k < \frac{1}{\int_B dt}$$

für alle s, t in B und alle reellen Werte von u genügt. Erfüllt $F(s, t, u)$ die Lipschitzbedingung

$$|F(s, t, u) - F(s, t, v) \leqq k|u - v|, \qquad k < \frac{1}{\int_B dt},$$

so hat Gleichung (39) genau eine Lösung.

II. Mehrdeutige Probleme.

§ 5.

Existenz einer nicht identisch verschwindenden Lösung (Eigenwertproblem).

Satz 7. $K(s, t)$ sei ein stetiger symmetrischer positiv definiter Kern, $g(s, u)$ eine stetige Funktion, die für s in B und irgendein Intervall I der u, das den Nullpunkt enthält, erklärt ist, und es sei $g(s, 0) = 0$ für alle s in B. Dann hat die nichtlineare Integralgleichung

$$\lambda\psi(s) - \int_B K(s, t)\, g(t, \psi(t))\, dt = 0 \tag{1}$$

neben der trivialen Lösung $\varphi = 0$ für mindestens einen reellen λ-Wert eine reelle nicht identisch verschwindende Lösung[14]).

Beweis: $\varphi_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ bezeichne das zum Kern $K(s,t)$ gehörige vollständige System der Eigenfunktionen, λ_ν den zu $\varphi_\nu(s)$ gehörigen Eigenwert. M^2 sei die obere Schranke für den Kern $K(s,t)$ in B und c eine positive Konstante derart, daß das Intervall $|u| \leqq c \cdot M$ in I enthalten ist; ferner sei

$$G(s,u) = \int_0^u g(s,v)\,dv \tag{2}$$

gesetzt. Zum Beweise betrachten wir auch hier wieder das endliche approximierende Gleichungssystem. Die stetige Funktion

$$H^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_B G\left(t, \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \varphi_\nu(t)\right) dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist auf der Oberfläche des Hyperellipsoids $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu y_\nu^2 = c^2$ erklärt: denn es ist auf ihr

$$|\psi_n(s)| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \varphi_\nu(s)\right| \leqq \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu y_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)^2}{\lambda_\nu}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq c\,M. \tag{3}$$

$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ sei eine Stelle auf dem Ellipsoid, an der H sein absolutes Minimum d annimmt, für $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ möge das absolute Maximum D angenommen werden. Dann gibt es reelle Konstanten $\lambda^{(n)}, \Lambda^{(n)}$, so daß die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu^{(n)}}\left[\lambda^{(n)} \sum_{\varrho=1}^{n} \lambda_\varrho x_\varrho^{(n)2} - 2\,H^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})\right] = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen, also

$$\begin{aligned} \lambda^{(n)} \lambda_\nu x_\nu^{(n)} - \int_B g\left(t, \sum_{\varrho=1}^{n} x_\varrho^{(n)} \varphi_\varrho(t)\right) \varphi_\nu(t)\,dt = 0, \\ \Lambda^{(n)} \lambda_\nu X_\nu^{(n)} - \int_B g\left(t, \sum_{\varrho=1}^{n} X_\varrho^{(n)} \varphi_\varrho(t)\right) \varphi_\nu(t)\,dt = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Hat der Kern nur die endlich vielen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so sind in $\psi^{(n)}(s) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{(n)} \varphi_\nu(s)$ und $\Psi^{(n)}(s) = \sum_{\nu=1}^{(n)} X_\nu^{(n)} \varphi_\nu(s)$ bereits Lösungen von (1)

[14]) Vgl. L. Lichtenstein, l. c., S. 152 u. f.

gefunden, die nicht identisch verschwinden, da $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu^{(n)2} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu X_\nu^{(n)2} = c^2$ ist. Sie gehören zu den Parameterwerten $\lambda^{(n)}$ bzw. $\Lambda^{(n)}$ und wegen (3) ist

$$|\psi^{(n)}(s)| \leqq c\,M, \qquad |\Psi^{(n)}(s)| \leqq c\,M. \tag{5}$$

Für die Zahlen $\lambda^{(n)}$ und $\Lambda^{(n)}$ erhält man aus (4) durch Multiplikation mit $x_\nu^{(n)}$ bzw. $X_\nu^{(n)}$ und Summation über ν die Darstellung

$$\begin{aligned} \lambda^{(n)} &= \frac{1}{c^2} \int_B \psi^{(n)}(s)\, g\big(s, \psi^{(n)}(s)\big)\, ds, \\ \Lambda^{(n)} &= \frac{1}{c^2} \int_B \Psi^{(n)}(s)\, g\big(s, \Psi^{(n)}(s)\big)\, ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Hat der Kern unendlich viele Eigenwerte, so kann man folgendermaßen schließen: Die Folge der Funktionen $\psi^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist nach (5) gleichmäßig beschränkt. Aus der mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung gewonnenen Abschätzung

$$\begin{aligned} |\psi^{(n)}(s_2) - \psi^{(n)}(s_1)| &\leqq \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu^{(n)2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\varphi_\nu(s_1) - \varphi_\nu(s_2))^2}{\lambda_\nu} \right\}^{1/2} \\ &\leqq c\,\{K(s_1, s_1) - 2K(s_1, s_2) + K(s_2, s_2)\}^{1/2} \end{aligned}$$

folgt wegen der Stetigkeit des Kernes $K(s, t)$ die gleichgradige Stetigkeit der Folge $\psi^{(n)}(s)$. Es gibt also eine Teilfolge $\psi^{(n_1)}, \psi^{(n_2)}, \ldots$, die gleichmäßig in B gegen eine stetige Grenzfunktion $\psi(s)$ konvergiert. Aus (6) folgt sodann, daß die Zahlen $\lambda^{(n_1)}, \lambda^{(n_2)}, \ldots$ einen Grenzwert haben

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{m \to \infty} \lambda^{(n_m)} = \frac{1}{c^2} \int_B \psi(s)\, g\big(s, \psi(s)\big)\, ds, \\ \Lambda &= \lim_{m \to \infty} \Lambda^{(n_m)} = \frac{1}{c^2} \int_B \Psi(s)\, g\big(s, \Psi(s)\big)\, ds. \end{aligned} \tag{7}$$

In der gleichen Weise wie auf S. 7 ergibt sich, daß der Rest

$$R_m(s) = \lambda^{(n_m)} \psi^{(n_m)}(s) - \int_B K(s, t)\, g\big(t, \psi^{(n_m)}(t)\big)\, dt$$

gleichmäßig in s gegen Null konvergiert, also das Bestehen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda\,\psi(s) - \int_B K(s, t)\, g\big(t, \psi(t)\, dt = 0, \\ \Lambda\,\Psi(s) - \int_B K(s, t)\, g\big(t, \Psi(t)\big)\, dt = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Um den Beweis zu vervollständigen ist jetzt noch zu zeigen, daß mindestens eine der beiden Lösungen $\psi(s)$ und $\Psi(s)$ nicht identisch verschwindet.

Wegen (5) liegen die Zahlen

$$(9) \quad d^{(n)} = \int_B G(s, \psi^{(n)}(s))\, ds, \qquad D^{(n)} = \int_B G(s, \Psi^{(n)}(s)\, ds \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

in einem endlichen Intervall. d sei die untere Grenze der $d^{(n)}$, D die obere Grenze der $D^{(n)}$. Da

$$(10) \qquad D \geqq \ldots \geqq D^{(2)} \geqq D^{(1)} \geqq d^{(1)} \geqq d^{(2)} \geqq \ldots \geqq d$$

ist, ergibt sich

$$(11) \quad d = \lim_{n \to \infty} d^{(n)} = \int_B G((s, \psi(s))\, ds, \qquad D = \lim_{n \to \infty} D^{(n)} = \int_B G(s, \Psi(s))\, ds.$$

Verschwinden nun ψ und Ψ identisch, so folgt aus (11), da $G(s, 0) = 0$ ist, $d = D = 0$ und aus (10) $d^{(n)} = D^{(n)} = 0$ für alle n. Dann ergibt sich also jede Funktion $\psi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu \varphi_\nu(s)$ mit $\sum_{\nu=1} \lambda_\nu y_\nu^2 = c^2$ als Lösung von (1). Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

§ 6.

Eine Verallgemeinerung.

In diesem Paragraphen soll für den Satz 7 ein Beweis erbracht werden, der es vermeidet auf endliche Systeme zurückzugreifen. Zugleich wird damit gezeigt, daß der Satz 7 auch für allgemeinere Funktionalgleichungen seine Gültigkeit behält.

Σ sei ein linearer Raum mit den Elementen φ, in dem ein zu dem in der Vektorrechnung analoges inneres Produkt (φ_1, φ_2)[15]) und damit eine Entfernung $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sqrt{(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)}$ definiert ist[16]). Σ sei in dieser Metrik vollständig[17]). Eine Rechenvorschrift, die gewissen Ele-

[15]) D. h. jedem Elementenpaar φ_1, φ_2 von Σ ist eine reelle Zahl (φ_1, φ_2) mit folgenden Eigenschaften zugeordnet: 1. $(a\,\varphi_1, \varphi_2) = a\,(\varphi_1, \varphi_2)$ für jede reelle Zahl a; 2. $(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi)$ für jedes Element ψ von Σ; 3. $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1)$; 4. $(\varphi, \varphi) \geq 0$ und nur für $\varphi = 0$ ist es $= 0$. Wie leicht nachzurechnen ist, gilt die „Schwarzsche Ungleichung“ $(\varphi_1, \varphi_2)^2 \leqq (\varphi_1, \varphi_1) \cdot (\varphi_2, \varphi_2)$. Das innere Produkt ist eine stetige Funktion seiner beiden Komponenten.

[16]) Die Entfernung kann auch anders definiert sein, doch muß diese Definition so gewählt sein, daß das innere Produkt eine stetige Funktion seiner beiden Komponenten wird.

[17]) D. h. das Cauchysche Konvergenzprinzip gilt in Σ. Die Definitionen „vollständiger linearer Raum“, „inneres Produkt“ und „Hermitescher Operator“ sind in dieser Form der Arbeit von J. v. Neumann: Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Annalen **102** (s. S. 49 u. f., besonders S. 64) entnommen.

menten φ von Σ reelle Zahlen zuordnet, soll „Funktion" heißen; „Operator" dagegen soll eine Rechenvorschrift heißen, wenn sie Elementen φ von Σ wieder Elemente von Σ zuordnet. Ein in Σ definierter Operator $\Gamma\varphi$ soll „Gradient der Funktion $G(\varphi)$" genannt werden, wenn für irgend zwei verschiedene Elemente φ_1, φ_2 aus Σ

$$G(\varphi_2) - G(\varphi_1) = (\Gamma\varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1) + R(\varphi_1, \varphi_2) \| \varphi_2 - \varphi_1 \| \tag{13}$$

ist, wobei $R(\varphi_1, \varphi_2)$ eine stetige Funktion darstellt, für die

$$\lim_{\varphi_2 \to \varphi_1} R(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

ist. H sei ein in Σ definierter von Null verschiedener linearer beschränkter Hermitescher Operator[18]), der „vollstetig" ist, d. h. jede beschränkte Teilmenge von Σ in eine kompakte Menge überführt. Σ' sei die abgeschlossene Hülle der Menge der $H\varphi$ mit φ aus Σ. $H^2\varphi$ bezeichne den iterierten Operator $H(H\varphi)$. Die „Kugel" K_c, die durch $(\varphi, \varphi) = c^2$ definiert ist, wird durch H auf ein in Σ' liegendes „Ellipsoid", abgebildet, dessen abgeschlossene Hülle mit K_c' bezeichnet sei. Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Satz 8. Ist der in K_c' definierte und stetige Operator $\Gamma\varphi$ der Gradient der Funktion $G(\varphi)$, so hat die Gleichung

$$\lambda\psi - H^2\Gamma\psi = 0 \tag{14}$$

mindestens zwei verschiedene Lösungen in K_c', die zu reellen λ-Werten gehören. Die Funktion

$$J(\varphi) = G(H\varphi) \tag{15}$$

nimmt auf K_c ein absolutes Maximum oder Minimum an, wenn $H^2\Gamma\varphi = 0$ nicht mehr als eine Lösung auf K_c' hat.

Beweis: Da H ein beschränkter Operator und G eine stetige Funktion ist, hat $J(\varphi)$ auf K_c endliche Grenzen. d sei die untere, D die obere Grenze, $\varphi_n (n = 1, 2, \ldots)$ bezeichne eine Minimal-, Φ_n eine Maximalfolge von Vergleichselementen, d. h. es sei

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} J(\varphi_n) = d, \qquad (\varphi_n, \varphi_n) = c^2, \\ &\lim_{n \to \infty} J(\Phi_n) = D, \qquad (\Phi_n, \Phi_n) = c^2. \end{aligned} \tag{16}$$

[18]) D. h.: 1. Es gibt ein φ in Σ, so daß $H\varphi \neq 0$, 2. $H(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 H\varphi_1 + a_2 H\varphi_2$, 3. $(H\varphi, H\varphi) \leqq h(\varphi, \varphi)$, 4. $(H\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, H\varphi_2)$. Aus der Beschränktheit folgt die Stetigkeit von H und umgekehrt; s. J. v. Neumann l. c., S. 73.

Da H vollstetig und K_c' abgeschlossen ist, gibt es eine Indexreihe $n_1 < n_2 < \ldots$, so daß die Folge $\psi_{n_m} = H\varphi_{n_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gegen ein Element ψ auf K_c' konvergiert. (Die folgenden Aussagen bleiben richtig, wenn man die φ, ψ, d durch die entsprechenden Φ, Ψ, D ersetzt.) Diese Indexreihe soll wieder mit $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet werden. Wegen (16) und der Stetigkeit der Funktion $G(\varphi)$ ist nach Definition (15)

$$d = \lim_{n \to \infty} J(\varphi_n) = \lim_{n \to \infty} G(\psi_n) = G(\psi). \tag{17}$$

Man betrachte nun folgende lineare Variation

$$\varphi_n(\varepsilon) = (1 + \delta_n)\varphi_n + \varepsilon\overline{\varphi}, \qquad \psi_n(\varepsilon) = H\varphi_n(\varepsilon) = (1 - \delta_n)\psi_n - \varepsilon H\overline{\varphi}. \tag{18}$$

Dabei sei ε eine beliebige reelle Konstante, $\overline{\varphi}$ ein bestimmtes Element aus Σ und die Konstante δ_n so gewählt, daß $\varphi_n(\varepsilon)$ zulässiges Konkurrenzelement wird. Das ist für alle genügend kleinen ε möglich, denn die Bedingung $(\varphi_n(\varepsilon), \varphi_n(\varepsilon)) = c^2$ ergibt für δ_n die quadratische Gleichung

$$(1 + \delta_n)c^2 + 2(1 + \delta_n)\varepsilon(\varphi_n, \overline{\varphi}) + \varepsilon^2(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) = c^2.$$

Diese Gleichung hat für genügend kleine ε reelle Wurzeln, deren eine

$$\delta_n = -\frac{\varepsilon}{c^2}(\varphi_n, \overline{\varphi}) + 0_n(\varepsilon^2) \tag{19}$$

ist, wobei

$$|0_n(\varepsilon^2)| \leqq 0 \cdot \varepsilon^2 \tag{20}$$

ist mit einer Konstanten 0, die nicht von n und ε abhängt.

Nach Voraussetzung ist Γ der Gradient von G, also ist wegen (13)

$$G(\psi_n(\varepsilon)) - G(\psi_n) = (\Gamma\psi_n, \psi_n(\varepsilon) - \psi_n) + R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon))\ \psi_n(\varepsilon) - \psi_n\ , \tag{21}$$

wobei $\lim_{\varepsilon \to 0} R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon)) = 0$ ist, da $\psi_n(\varepsilon)$ gegen ψ_n strebt, wenn ε gegen Null geht. Aus (18) und (19) ergibt sich

$$(\Gamma\psi_n, \psi_n(\varepsilon) - \psi_n) = \varepsilon[-\lambda_n(\varphi_n, \overline{\varphi}) + (\Gamma\psi_n, H\overline{\varphi})] + 0_n(\varepsilon^2)(\Gamma\psi_n, \psi_n). \tag{22}$$

Dabei ist

$$\lambda_n = \frac{1}{c^2}(\psi_n, \Gamma\psi_n) \tag{23}$$

gesetzt. Ist $\overline{\varphi} = H\varphi$ gewählt, so wird

$$\begin{aligned} -\lambda_n(\varphi_n, \overline{\varphi}) + (\Gamma\psi_n, H\overline{\varphi}) &= -\lambda_n(\psi_n, \overline{\varphi}) + (H^2\Gamma\psi_n, \overline{\varphi}) \\ &= (-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n, \overline{\varphi}). \end{aligned} \tag{24}$$

Die Folge $-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiert gegen

$$M\psi = -\lambda\psi + H^2\Gamma\psi, \tag{25}$$

wobei nach (23)

$$\lambda = \frac{1}{c^2}(\psi, \Gamma\psi) \tag{26}$$

ist. Es ist leicht zu sehen, daß $M\psi = 0$ sein muß. Nach (15), (21), (22) und (24) ist nämlich

$$\begin{aligned} J(\varphi_n(\varepsilon)) - J(\varphi_n) &= G(\psi_n(\varepsilon)) - G(\psi_n) \\ &= \varepsilon(-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n, \bar{\varphi}) + 0_n(\varepsilon^2)(\Gamma\psi_n, \psi_n) \\ &\quad + R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon))\,\|\psi_n(\varepsilon) - \psi_n\|. \end{aligned} \tag{27}$$

Ist nun $M\psi \neq 0$, so wähle man von Anfang an $\bar{\varphi} = M\psi$. Da $-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n$ gegen $M\psi$ konvergiert, gibt es eine Zahl N, so daß für $n > N$

$$(-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n, \varphi) > \frac{2}{3}(M\psi, M\psi) \tag{28}$$

wird, und man kann die positive Zahl ε_1 so klein wählen, daß für $0 > \varepsilon > -\varepsilon_1$

$$|R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon)) \cdot \|\psi_n(\varepsilon) - \psi_n\| + 0_n(\varepsilon^2)(\Gamma\psi_n, \psi_n)| < \frac{\varepsilon}{3}(M\psi, M\psi) \tag{29}$$

ausfällt. Dann erhält man für die so gewählten Konkurrenzelemente nach (27), (28) und (29)

$$J(\varphi_n(\varepsilon)) - J(\varphi_n) < \frac{\varepsilon}{3}(M\psi, M\psi).$$

Das ist aber wegen $\varepsilon < 0$ unmöglich, da nach (16) $J(\varphi_n)$ gegen die untere Grenze d strebt.

Da die gleichen Überlegungen für Ψ gelten, erhält man als Resultat die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda\psi - H^2\Gamma\psi &= 0, \\ \Lambda\Psi - H^2\Gamma\Psi &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

wobei

$$\lambda = \frac{1}{c^2}(\psi, \Gamma\psi), \qquad \Lambda = \frac{1}{c^2}(\Psi, \Gamma\Psi) \tag{31}$$

ist. Es ist noch zu zeigen, daß ψ von Ψ verschieden ist. Ist $\psi = \Psi$, so ist nach (16) $d = D$, also $J(\varphi)$ auf K_c konstant, es genügt also jedes Element von K_c' der Gleichung (14). Da $H \neq 0$ ist, enthält K_c' ein von 0 verschiedenes Element ψ, somit auch zwei verschiedene Elemente, da mit ψ auch $\Psi = -\psi$ zu K_c' gehört. Damit ist der erste Teil des Satzes 8 bewiesen.

Um den zweiten Teil zu beweisen, bemerkt man, daß λ und Λ nicht beide zugleich 0 sein können, denn das hätte nach (30) zur Folge, daß $H^2\Gamma\psi = 0$ mehr als eine Lösung auf K_c' hat. Es sei also $\lambda \neq 0$. Setze $\varphi_0 = \frac{1}{\lambda}H\Gamma\psi$, dann ist nach (30) und (31)

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \frac{1}{\lambda^2}(H\Gamma\psi, H\Gamma\psi) = \frac{1}{\lambda^2}(H^2\Gamma\psi, \Gamma\psi) = \frac{1}{\lambda}(\psi, \Gamma\psi) = c^2$$

und nach (15), (17) und (30)

$$J(\varphi_0) = G(H\varphi_0) = G\left(\frac{1}{\lambda} H^2 \Gamma \psi\right) = G(\psi) = d.$$

An der Stelle φ_0 auf K_r nimmt also $J(\varphi)$ sein Minimum an. Damit ist auch der zweite Teil des Satzes 8 bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß die Beziehung (31) zwischen der Lösung der Gleichung (14) und ihrem zugehörigen Parameterwert nicht nur für die speziellen Lösungen ψ und Ψ gilt, sondern für jede Lösung der Gleichung (14), die nicht zugleich Lösung von $H^2 \Gamma \psi = 0$ ist. Sei nämlich ψ_0 irgendeine Lösung von (14) und $H^2 \Gamma \psi_0 \neq 0$. Dann ist der zugehörige Parameterwert $\lambda_0 \neq 0$ und $\psi_0 \neq 0$, also gibt es nach (14) ein Element φ_0, so daß

$$\psi_0 = H\varphi_0 \tag{32}$$

ist. (Man braucht ja nur $\varphi_0 = \frac{1}{\lambda_0} H \Gamma \psi_0$ zu wählen.) φ_0 kann nicht $= 0$ sein, da dies nach (32) $\psi_0 = 0$ zur Folge hätte. Da nach (14)

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \frac{1}{\lambda_0^2} (H\Gamma\psi_0, H\Gamma\psi_0) = \frac{1}{\lambda_0^2} (H^2\Gamma\psi_0, \Gamma\psi_0) = \frac{1}{\lambda_0} (\psi_0, \Gamma\psi_0)$$

ist, erhält man somit

$$\lambda_0 = \frac{(\psi_0, \Gamma\psi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}. \tag{33}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß es Lösungen gibt, die zu dem Parameterwert $\lambda = -1$ gehören, d. h. Lösungen der Gleichung

$$\psi + H^2 \Gamma \psi = 0.$$

Da H ein beschränkter Operator ist, gibt es eine positive Konstante h, so daß für alle φ aus Σ

$$(H\varphi, H\varphi) \leqq \frac{1}{h} (\varphi, \varphi) \tag{34}$$

ist. (Der beste Wert für h ist der kleinste Eigenwert des Operators H^2, siehe weiter unten!) Mit dieser Bezeichnung gilt der

Satz 9. Ist der in Σ' definierte und stetige Operator $\Gamma\varphi$ der Gradient der Funktion $G(\varphi)$ und ist

$$G(\varphi) \geqq -\frac{k}{2} (\varphi, \varphi) - C, \tag{35}$$

wo k und C positive Konstanten sind und $k < h$ ist, so hat die Gleichung

$$\psi + H^2 \Gamma \psi = 0 \tag{36}$$

eine Lösung in Σ'.

Beweis: Ein ähnliches Verfahren wie beim Beweise des Satzes 8 führt auch hier zum Ziele. Die Funktion

$$J(\varphi) = (\varphi, \varphi) + 2G(H\varphi) \tag{37}$$

ist wegen (34) und (35) nach unten beschränkt:

$$J(\varphi) \geqq (\varphi, \varphi) - k(H\varphi, H\varphi) - 2C \geqq \left(1 - \frac{k}{h}\right)(\varphi, \varphi) - 2C \geqq -2C. \tag{38}$$

$J(\varphi)$ hat also eine endliche untere Grenze d. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sei eine Minimalfolge, d. h. $\lim_{n \to \infty} J(\varphi_n) = d$. Man kann die φ_ν so gewählt denken, daß $J(\varphi_\nu) \leqq d + 1$ ist für $\nu = 1, 2, \ldots$. Dann ist nach (38)

$$(\varphi_\nu, \varphi_\nu) \leqq \frac{2C + d + 1}{1 - \frac{k}{h}} = C_1, \tag{39}$$

wo C_1 eine von ν unabhängige Konstante ist. Da H vollstetig ist, gibt es eine Indexreihe $n_1 < n_2 < \ldots$, so daß die Folge $\psi_{n_m} = H\varphi_{n_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gegen ein Element ψ von Σ' konvergiert. Diese Indexreihe soll wieder mit 1, 2, 3, ... bezeichnet werden.

Man betrachte nun die lineare Variation

$$\varphi_n(\varepsilon) = \varphi_n + \varepsilon\overline{\varphi}, \qquad \psi_n(\varepsilon) = H\varphi_n(\varepsilon) = \psi_n + \varepsilon H\overline{\varphi}.$$

Dann ist nach (37) und (13)

$$\begin{aligned} J(\varphi_n(\varepsilon)) - J(\varphi_n) &= 2\varepsilon(\varphi_n, \overline{\varphi}) + 2G(\psi_n(\varepsilon)) - 2G(\psi_n) + \varepsilon^2(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) \\ &= 2\varepsilon[(\varphi_n, \overline{\varphi}) + (\Gamma\psi_n, H\overline{\varphi})] + 2\varepsilon R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon))\,\|H\overline{\varphi}\| \\ &\quad + \varepsilon^2(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}). \end{aligned}$$

Wählt man $\overline{\varphi} = H\overline{\overline{\varphi}}$, so wird

$$(\varphi_n, \overline{\varphi}) + (\Gamma\psi_n, H\overline{\varphi}) = (\psi_n, \overline{\overline{\varphi}}) + (H^2\Gamma\psi_n, \overline{\overline{\varphi}}) = (\psi_n + H^2\psi_n, \overline{\overline{\varphi}}).$$

Da die Folge $\psi_n + H^2\Gamma\psi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gegen $\psi + H^2\Gamma\psi$ konvergiert, folgt daraus genau ebenso wie im Beweise zu Satz 8, daß

$$\psi + H^2\Gamma\psi = 0$$

sein muß.

Zusatz: Genügt der Operator $\Gamma\varphi$ der „Lipschitzbedingung"

$$(\Gamma\varphi_2 - \Gamma\varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1) \geqq -k(\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1) \qquad (k < h) \tag{40}$$

für irgendzwei Elemente φ_1 und φ_2 aus Σ', so hat die Gleichung (36) nicht mehr als eine Lösung.

Beweis: Die Gleichung (36) habe zwei Lösungen ψ_1 und ψ_2. Dann genügt die Differenz $\overline{\psi} = \psi_2 - \psi_1$ der Gleichung

$$\overline{\psi} + H^2(\Gamma(\overline{\psi} + \psi_1) - \Gamma\psi_1) = 0. \tag{41}$$

Setzt man $\overline{\varphi} = -H(\Gamma(\overline{\psi} + \psi_1) - \Gamma\psi_1)$, so ist $\overline{\psi} = H\overline{\varphi}$ und

$$(\overline{\varphi}, \overline{q}) = (\overline{q}, \quad H(\Gamma(\overline{\psi} + \psi_1) - \Gamma\psi_1)) = (-\overline{\psi}, \Gamma(\overline{\psi} + \psi_1) - \Gamma\psi_1),$$

also wegen (40) und (34)

$$(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) \leqq k(\overline{\psi}, \overline{\psi}) = k(H\overline{\varphi}, H\overline{\varphi}) \leqq \frac{k}{h}(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}).$$

Da $\frac{k}{h} < 1$ ist, ist das nur möglich, wenn $(\overline{q}, \overline{q}) = 0$, also $\overline{q} = 0$ und ebenso $\overline{\psi} = \psi_2 - \psi_1 = 0$ ist.

§ 7.

Einige Spezialfälle und Ergänzungen.

1. $\Gamma\varphi \equiv \varphi$, also der Operator Γ sei die Identität. Aus der identischen Gleichung

$$\tfrac{1}{2}[(\varphi_2, \varphi_2) - (\varphi_1, \varphi_1)] = (\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_1) + \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1)$$

folgt nach Definition (13), daß $\Gamma q = q$ der Gradient von $G(q) = \frac{1}{2}(q, q)$ ist. Der Satz 8 besagt dann, daß die homogene lineare Gleichung

$$\lambda\psi - H^2\psi = 0 \tag{42}$$

mindestens zwei verschiedene Lösungen besitzt, also insbesondere eine von Null verschiedene Lösung ψ_0, die zu einem von Null verschiedenen Parameterwert λ_0 gehört. Jede solche Lösung heißt bekanntlich Eigenfunktion des Operators H^2 und der reziproke Wert des zugehörigen Parameters Eigenwert. Aus (42) folgt

$$\lambda = \frac{(H^2\psi, \psi)}{(\psi, \psi)} = \frac{(H\psi, H\psi)}{(\psi, \psi)}.$$

Sämtliche Eigenwerte sind also positiv.

Ist ψ_0 eine Eigenfunktion von H^2, $\frac{1}{\lambda_0}$ der zugehörige Eigenwert, so ist $\varphi_0 = \sqrt{\lambda_0}\,\psi_0 + H\psi_0$ entweder gleich Null oder es ist $\sqrt{\lambda_0}\,\varphi_0 - H\varphi_0 = \lambda_0\psi_0 - H^2\psi_0 = 0$, also ist $\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}$ oder $-\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}$ Eigenwert von H. Auch die übrigen Sätze der Theorie der linearen Integralgleichungen mit symmetrischem Kern lassen sich auf die einfachste Weise sinngemäß übertragen, insbesondere die Sätze, daß H endlich oder abzählbar viele Eigenwerte besitzt, daß zu jedem Eigenwert endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen existieren, daß der Entwicklungssatz für quellenmäßig darstellbare Funktionen, d. h. für Elemente $\psi = H\varphi$ gilt, usw.

2. Σ sei die Gesamtheit der reellen quadratisch integrierbaren Funktionen, die im Bereich B definiert sind, und das innere Produkt sei erklärt durch $(\varphi_1, \varphi_2) = \int_B \varphi_1(s)\,\varphi_2(s)\,ds$. $K(s,t)$ sei wie in § 5 erklärt: stetig, positiv definit und symmetrisch, $\varphi_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ das vollständige System seiner Eigenfunktionen, λ_ν die zugehörigen Eigenwerte. Durch

$$\psi = H\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu}\,\varphi_\nu,$$

wird ein Hermitescher Operator definiert, der allen in § 6 genannten Bedingungen genügt. Er ist linear und beschränkt, da $|\psi(s)| \leqq M \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ ist (s. § 5, (3)). Er ist auch vollstetig, da das Bild jeder beschränkten Teilmenge von Σ eine Menge gleichmäßig beschränkter gleichgradig stetiger Funktionen des Bereiches B ist, wie man leicht nachprüft. Sind $g(s,u)$ und $G(s,u) = \int_0^u g(s,v)\,dv$ die in Satz 7 genannten Funktionen, so ist der in K_c' definierte Operator $\overset{*}{\Gamma}\psi = g(s, \psi(s))$ der Gradient der Funktion $\overset{*}{G}(\psi) = \int_B G(s, \psi(s))\,ds$, wie auch sofort einzusehen ist.

Da nun $H^2\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu}\,\varphi_\nu = \int_B K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$ ist, schließt man aus Satz 8, daß es mindestens einen reellen λ-Wert gibt, für den die Gleichung

$$\lambda\psi(s) - \int_B K(s,t)\,g(t, \psi(t))\,dt = 0 \tag{43}$$

eine nicht identisch verschwindende stetige Lösung besitzt. Damit ist gezeigt, daß Satz 7 ein Spezialfall von Satz 8 ist. Für λ ergibt sich aus (31)

$$\lambda = \frac{1}{c^2} \int_B \psi(s)\,g(s, \psi(s))\,ds. \tag{44}$$

3. Das zum Beweise verwandte Konstruktionsverfahren liefert eine eindimensionale Schar von nicht identisch verschwindenden Lösungen der Gleichung (43), deren zugehörige Parameterwerte in (44) gegeben sind; denn die gefundenen Lösungen hängen noch von der Wahl der Normierungskonstanten c ab, die in einem gewissen Intervall, entsprechend dem Definitionsbereich von $g(s,u)$ willkürlich wählbar ist. Insbesondere hat die Gleichung (43) stets nicht identisch verschwindende Lösungen, deren absoluter Betrag in B eine willkürlich gegebene positive Zahl nicht

übersteigt. Diese Lösungen gehen im allgemeinen nicht sämtlich aus einer Lösung durch Multiplikation mit verschiedenen Konstanten hervor, wie das bei den homogenen linearen Integralgleichungen der Fall ist.

Es kann auch vorkommen, daß nur für gewisse diskrete c-Werte neben ψ auch $c \cdot \psi$ Lösung von (43) ist, wie das Beispiel

$$\lambda \psi(s) - \int_B K(s,t)\, \psi(t) \sin(\log \psi^2(t))\, dt = 0 \quad (\sin \log 0 = 0)$$

zeigt. Nach Satz 7 hat diese Gleichung eine nicht identisch verschwindende Lösung $\psi_0(s)$. Dann ist aber auch $e^{k\pi} \psi_0(s)$ für jede ganze Zahl k eine Lösung und alle diese Lösungen gehören zu demselben Parameterwert λ_1. Auch $e^{\frac{2k+1}{2}\pi} \psi_0(s)$ ist für jede ganze Zahl k eine solche Lösung, diese gehören aber alle zum Parameterwert $-\lambda_0$.

4. Ebenso wie sich der Satz 7 als Spezialfall des Satzes 8 ergab, erhält man aus Satz 9 das Resultat, daß die Hammersteinsche Gleichung

$$\psi(s) + \int_B K(s,t)\, f(t, \varphi(t))\, dt = 0 \tag{45}$$

eine stetige Lösung hat, wenn die stetige Funktion $f(s,u)$ für s in B und alle reellen Werte von u erklärt ist und für jede in B stetige Funktion $\varphi(s)$

$$\int_B F(s, \varphi(s))\, ds \geqq -\frac{k}{2} \int_B \varphi^2(s)\, ds - C$$

$$\left(F(s,u) = \int_0^u f(s,v)\, dv;\ k < \lambda_1 \right) \tag{46}$$

ist[19]). Man braucht, um dies einzusehen, nur wieder Σ' mit der Menge der in B quadratisch integrierbaren Funktionen $\varphi(s)$, das innere Produkt (φ_1, φ_2) mit $\int_B \varphi_1(s)\, \varphi_2(s)\, ds$, den Operator $\psi = H\varphi$ mit $\psi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s)$, die Funktion $G(\varphi)$ mit $\int_B F(s, \varphi(s))\, ds$ und

[19]) Es genügt, daß diese Voraussetzung für alle quellenmäßige Funktionen $\varphi'(s) = \int_B K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$, wo $\varphi(s)$ eine quadratisch integrierbare Funktion ist, erfüllt ist; denn diese Menge von Funktionen entspricht genau dem Bereich Σ', der in der Voraussetzung (35) genannt ist. (46) ist eine Folge von $F(s,u) \geqq -\frac{k}{2} u^2 - C$, so daß der Hammersteinsche Existenzsatz (s. l. c. 1, S. 120) sich als Spezialfall unseres Satzes 8 ergibt.

ihren Gradienten $\Gamma\varphi$ mit $f(s, \varphi(s))$ identifizieren. Dann erkennt man, daß die Gleichung (36) in die Gleichung (45) und die Voraussetzung (35) in die Voraussetzung (46) übergeht.

Aus dem Zusatz über die Eindeutigkeit ergibt sich, daß die Gleichung (45) eine und nur eine Lösung hat, wenn die Funktion $f(s, u)$ eine stetige Ableitung besitzt, die der Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial u}(s, u) \geqq -k \tag{47}$$

für alle s in B und alle reellen Werte der u genügt[20]). Denn aus dieser Voraussetzung folgt sowohl die Richtigkeit von (46) wie auch die von (40).

Ist $\frac{\partial f}{\partial u}$ nach unten beschränkt, Voraussetzung (47) aber nicht erfüllt, so ist die Anzahl der Lösungen von (45) gleich der Anzahl der Lösungssysteme eines endlichen Gleichungssystems, das man in der gleichen Weise wie im Beweise zu Satz 2 erhält.

[20]) Der Hammersteinsche Eindeutigkeitssatz (s. l. c. 1, S. 126) verlangt die Beschränktheit der Ableitung nach beiden Seiten, berücksichtigt also nicht die Definitheit des Kernes. Auch die Bedingung der Monotonie der Funktion $f(s, u)$, d. h. $\frac{\partial f}{\partial u} \geqq 0$ verlangt mehr als die Bedingung (47).

Mein Lebenslauf.

Ich bin am 3. Mai 1909 zu München als Sohn des Kaufmanns Moritz Golomb geboren. Meine Schulbildung erhielt ich in Würzburg, wo ich im April 1928 das Realgymnasium absolvierte und darauf die Maximilians-Universität bezog, um mich dem Studium der Mathematik zu widmen. Nach drei Semestern setzte ich mein Studium an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin fort.

Ich besuchte Vorlesungen und Seminare der Herren Professoren E. Hilb†, Rost, v. Weber, Harms in Würzburg, Bieberbach, Feigl, Hammerstein, v. Mises, J. v. Neumann, E. Schmidt, I. Schur, v. Laue, Planck, Schrödinger, W. Köhler, Reichenbach u. a. in Berlin.

Herrn Prof. Dr. A. Hammerstein bin ich zu besonderem Danke verbunden für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Bemerkungen.

Berlin, Juli 1934.

Michael Golomb.

Printed in Germany